О матрицах Грама систем равномерно ограниченных функций

Б. С. Кашин, С. Й. Шарек

В этой статье приводится доказательство теоремы, анонсированной в заметке [1]. Напомним, прежде всего, некоторые известные понятия и постановки задач и введем обозначения, используемые в дальнейшем.

Как обычно $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, – евклидово N-мерное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и евклидовой нормой $|\cdot|$,

$$B^N = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\}, \qquad S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}.$$

Для набора векторов $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i=1}^p \subset \mathbb{R}^N$ через $G_{\mathcal{Z}}$ обозначим матрицу Грама:

$$G_{\mathcal{Z}} = \{\langle z_i, z_k \rangle\}_{i,k=1}^p.$$

Через O^N мы обозначим группу вращений пространства $\mathbb{R}^N$. Ясно, что для $\sigma \in O^N$ и $\sigma\mathcal{Z} = \{\sigma z_i\}_{i=1}^p$ имеет место равенство

$$G_{\sigma\mathcal{Z}} = G_{\mathcal{Z}}. \tag{1}$$

Ниже мы рассматриваем гильбертово пространство $L^2(0,1)$ и более узкое пространство $L^\infty(0,1)$ и через $(\cdot, \cdot)$ обозначаем скалярное произведение

$$(f,g) = \int_0^1 fg\, d\mu; \qquad f,g \in L^2(0,1),$$

где μ – мера Лебега на $(0,1)$.

Наконец, определим при $N = 1,2,\ldots$ N-мерное пространство кусочно-постоянных функций:

$$D_N = \left\{ f \in L^2(0,1) : f(x) = \mathrm{const} = c_j \text{ для } x \in \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right),\ 1 \leqslant j \leqslant N \right\}.$$

В анализе, геометрии и прикладных исследованиях естественно возникает вопрос о существовании для заданного набора из N векторов пространства $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \dots)$:

$$\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_N\} \subset B^N \tag{2}$$

набора функций $\{f_j\}_{j=1}^N \subset L^\infty(0,1)$ с равномерными нормами ограниченными абсолютной постоянной и таких, что

$$\big(f_j, f_k\big) = \langle z_j, z_k\rangle, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant N. \tag{3}$$

Используя хорошо известное неравенство:

$$\mathcal{M}\left\{x \in S^{N-1} : \|x\|_{\ell_\infty^N} \geqslant \frac{C \ln^{1/2} N}{N^{1/2}}\right\} \leqslant \frac{1}{N^2},$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная, $\mathcal{M}$ – нормированная мера Лебега на сфере S^{N-1}, а $\|x\|_{\ell_\infty^N} = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x(i)|$, если $x = \{x(i)\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$, сразу можно вывести, что для любого набора вида (2) найдется вращение $\sigma \in O^N$ такое, что

$$\|\sigma z_j\|_{\ell_\infty^N} \leqslant \frac{C \ln^{1/2}(N+1)}{N^{1/2}}, \qquad j = 1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

Из (4), используя очевидную связь между евклидовыми пространствами $\mathbb{R}^N$ и D_N, непосредственно получаем, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции $\{f_j\}_{j=1}^N \subset D_N \subset L^\infty(0,1)$ такие, что имеет место (3) и при этом

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N} \|f_j\|_{L^\infty} \leqslant C \ln^{1/2}(N+1). \tag{5}$$

Оценка (5) точна по порядку. Точнее, если выбрать вектора $\{z_i\}_{i=1}^N$ таким образом, чтобы они образовывали 1 сеть (по норме $|\cdot|$) на сфере некоторого подпространства $L \subset \mathbb{R}^N$ размерности $\dim L \geqslant c \ln N$, то для любого набора функций $\{f_j\}_{j=1}^N$ со свойством (3) имеет место неравенство

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N} \|f_j\|_{L^\infty} \geqslant c_1 \ln^{1/2} N \tag{6}$$

(см., например, лемму 3 в [1]).

Представляет интерес вопрос о нахождении условий на набор (2), при которых неравенство (5) может быть уточнено и заменено оценкой:

$$\|f_j\|_{L^\infty} \leqslant K, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{7}$$

где K – абсолютная постоянная.

Первые, частные, результаты такого рода были получены Д. Е. Меньшовым еще в тридцатые годы прошлого века в связи с задачей о продолжении системы функций, заданной на отрезке $[-1, 0]$ до ортонормированной, равномерно ограниченной системы на $[-1, 1]$ (см. [2]). В этой связи отметим, что остается открытым вопрос, поставленный А. М. Олевским (см. [3], стр. 58) о возможности нахождения системы функций $\{f_j\}_{j=1}^N$ со свойствами (3), (7), в случае, когда матрица Грама набора (2) удовлетворяет неравенству

$$I_N - G_{\mathcal{Z}} \geqslant 0$$

(здесь I_N – единичная матрица порядка N, а неравенство $B \geqslant 0$ означает неотрицательную определенность квадратичной формы, порожденной симметрической матрицей B).

Рассматриваемые в этой статье вопросы непосредственно связаны также с классическими результатами из функционального анализа о факторизации линейных операторов. Так из теорем Гротендика и Пича (см. подробнее [4], гл. 5 и, в частности, теор. 5.10) вытекает, что для любого набора $\mathcal{Z}$ вида (2) найдется система функций $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^N$ с $\|f_j\|_{L^\infty} \leqslant \sqrt{\pi/2}$ при $j = 1, \ldots, N$ и такая, что

$$G_{\mathcal{Z}} = G_{\mathcal{F}} - \Delta, \qquad \Delta \geqslant 0.$$

С учетом последнего результата естественно рассмотреть возможность представления матрицы Грама произвольного набора (2) в виде

$$G_{\mathcal{Z}} = G_{\mathcal{F}} - \Delta, \qquad \Delta \text{ – диагональная матрица,}$$

где для функций системы $\mathcal{F}$ имеет место оценка (7). Этот вопрос был поставлен также А. Мегрецким в связи с прикладными задачами квадратичного программирования (см. [5]). Оказывается, что ответ на указанный вопрос отрицательный. Имеет место

Теорема. *Для $N = 1, 2\ldots$ существует такой набор $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(N)$ вида* (2), *что для любой системы функций $\{f_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющей соотношениям:*

$$\langle z_j, z_k \rangle = (f_j, f_k) \qquad \textit{при} \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant N \tag{8}$$

справедливо неравенство

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N}\|f_j\|_{L^\infty}\geqslant c\,(\ln N)^{1/4},$$

где $c>0$ *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Определим при $N=1,2,\dots$ постоянную K_N как нижнюю грань чисел K таких, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции $\{f_j\}_{j=1}^N$ с $\|f_j\|_{L^\infty}\leqslant K$, $j=1,2,\dots,N$, и такие, что имеет место (8). Нам надо проверить, что $K_N\geqslant c(\ln N)^{1/4}$. Определим также при $N=1,2,\dots$ постоянную M_N как нижнюю грань чисел M таких, что для любого набора векторов вида (2) найдутся функции $\{f_j\}_{j=1}^N$ с $\|f_j\|_{L^\infty}\leqslant M$, $j=1,\dots,N$ такие, что имеет место (8) и

$$\langle z_j,z_j\rangle\leqslant(f_j,f_j),\qquad j=1,2,\dots,N. \tag{9}$$

Проверим, что

$$K_{2N}\geqslant M_N,\qquad N=1,2,\dots, \tag{10}$$

а затем установим, что

$$M_N\geqslant c'(\ln N)^{1/4},\qquad c'>0,\quad N=1,2,\dots \tag{11}$$

Тем самым утверждение теоремы будет обосновано. Для того чтобы проверить (10), мы для заданного набора $\mathcal{Z}$ вида (2) построим набор векторов

$$\mathcal{W}=(w_1,\dots,w_{2N})=(z_1,z_1,z_2,z_2,\dots,z_N,z_N)\subset B^N\subset B^{2N}$$

и (см. определение величины K_N) для данного $\varepsilon>0$ найдем функции $g_1,\dots,g_{2N}$ такие, что $(g_i,g_k)=\langle w_i,w_k\rangle$, если $i\neq k$ и $\|g_i\|_{L^\infty}\leqslant K_{2N}+\varepsilon$, $i=1,\dots,2N$. Тогда, в частности, для $k=1,2,\dots,N$

$$|z_k|^2=\langle z_k,z_k\rangle=\langle w_{2k-1},w_{2k}\rangle=(g_{2k-1},g_{2k})\leqslant\|g_{2k-1}\|_{L^2}\cdot\|g_{2k}\|_{L^2},$$

то есть

$$\max\bigl\{\|g_{2k-1}\|_{L^2},\|g_{2k}\|_{L^2}\bigr\}\geqslant|z_k|,\qquad k=1,2,\dots,N,$$

а значит, выбирая в качестве f_k функцию g_{2k-1} или g_{2k}, мы можем обеспечить выполнение условия (9) вместе с равенствами (8) и оценкой $\|f_k\|_{L^\infty}\leqslant K_{2N}+\varepsilon$. Тем самым неравенство (10) установлено.

Доказательство неравенства (11). Ниже, для набора векторов $\{v_j\}_{j=1}^N$ в некотором евклидовом пространстве, через $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_N\}$ и $\{v_1, \ldots, v_N\}^\perp$ мы обозначаем соответственно линейную оболочку и ее ортогональное дополнение. Зафиксируем (на время произвольный) набор вида (2) и $\varepsilon \in (0,1)$. Выберем функции $\{f_j\}_{j=1}^N$ с

$$\|f_j\|_{L^\infty} \leqslant M_N + \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

так, что имеет место (8) и (9). Далее, используя очевидные изометрические вложения $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{2N}$, $B^N \subset B^{2N}$, мы можем найти в $\mathbb{R}^{2N}$ векторы u_j, $j = 1, \ldots, N$, такие, что

$$\begin{gathered} u_j \in \{z_1, \ldots, z_N\}^\perp, \qquad j = 1, \ldots, N, \\ \langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad \text{при} \qquad i \neq j \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$\langle u_j, u_j \rangle + \langle z_j, z_j \rangle = (f_j, f_j), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Полагая $w_j = z_j + u_j$, $j = 1, \ldots, N$, мы, в силу (13), имеем

$$\langle w_i, w_j \rangle = (f_i, f_j) \quad \forall (i,j). \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что отображение

$$\mathbb{R}^{2N} \supset \mathrm{span}\{w_j,\ j = 1, \ldots, N\} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{span}\{f_j,\ j = 1, \ldots, N\} \subset L^2(0,1)$$

корректно определяется равенствами $\varphi(w_j) = f_j$, $j = 1, \ldots, N$ и является изометрией. Очевидно, что это отображение может быть продолжено до изометрии между $\mathbb{R}^{2N}$ и некоторым $2N$-мерным пространством в $L^2(0,1)$, которую мы также обозначим через φ.

Пусть

$$g_j = \varphi(z_j), \qquad h_j = \varphi(u_j), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Тогда

$$g_j, h_j \in L^2, \qquad g_j + h_j = f_j \in L^\infty(0,1), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} (g_i, h_j) = 0 \quad \forall (i,j), \\ (h_i, h_j) = 0, \qquad \text{если} \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{16}$$

Пусть $L = \operatorname{span}\{g_1, \dots, g_N\}$. Тогда φ изометрично отображает на L подпространство

$$E = \operatorname{span}\{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{R}^{2N}.$$

До сих пор набор $\{z_j\}_{j=1}^N \subset B^N \subset B^{2N}$ был произвольным. Теперь мы конкретизируем выбор векторов z_j, $j = 1, \dots, N$, при этом, не ограничивая общности, будем считать, что число N достаточно велико.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{2N}$ подпространство размерности $\ell = [c_0 \ln N]$, где абсолютная постоянная $c_0 > 0$ выбрана настолько малой, что на сфере S_E найдется 1 сеть (относительно евклидовой нормы $|\cdot|$) $\mathcal{V} = \{v_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0}$ с числом элементов

$$\nu_0 \leqslant 3^\ell \leqslant N^{1/4} \tag{17}$$

(мы обозначаем через $[x]$ целую часть x). Тогда выпуклая оболочка

$$\operatorname{conv}\{v_\nu\}_{\nu=1}^{\nu_0} \supset \frac{1}{2}\, B_E \equiv \frac{1}{2}\, (B^{2N} \cap E). \tag{17$'$}$$

Повторив каждый элемент v_ν сети $\mathcal{V}$ $s = [N^{3/4}]$ раз и дополнив при необходимости полученный набор произвольным образом до системы из N элементов шара B_E мы построим нужный нам набор $\mathcal{Z} = \{z_j\}_{j=1}^N$ вида (2). Используя введенные ранее обозначения, мы, в силу (17$'$), можем утверждать, что имеет место включение

$$\operatorname{conv}\{g_j\}_{j=1}^N \supset \frac{1}{2}\, \bigl\{f \in L : \|f\|_{L^2} \leqslant 1\bigr\} \equiv \frac{1}{2}\, B_2^L \equiv \frac{1}{2}\, \bigl(B_2 \cap L\bigr), \tag{18}$$

где B_2 – единичный шар в $L^2(0,1)$. Кроме того, соотношения (12), (15), (16) гарантируют включения

$$g_j \subset (M_N + \varepsilon) P_L(B_\infty), \qquad j = 1, \dots, N, \tag{19}$$

где P_L – оператор ортогонального проектирования из $L^2(0,1)$ на L, а

$$B_\infty = \bigl\{f \in L^2(0,1) : \|f\|_{L^\infty} \leqslant 1\bigr\}.$$

Из (19) и (18) вытекает, что

$$B_2^L \subset 2(M_N + \varepsilon) P_L(B_\infty). \tag{20}$$

В свою очередь из (20) следует, что для любого элемента $g \in L$

$$\|g\|_{L^1} \leqslant \|g\|_{L^2} \leqslant 2(M_N + \varepsilon)\|g\|_{L^1} \tag{21}$$

(левое неравенство в (21) справедливо для любой $g \in L^2$). Действительно, (см. (20)), если функция $g \in L$ с $\|g\|_{L^2} = 1$ представима в виде

$$g = f + h, \qquad \|f\|_{L^\infty} \leqslant 2(M_N + \varepsilon), \quad h \perp g,$$

то

$$0 = (g, h) = (g, g - f) = 1 - (g, f)$$

То есть $\|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^\infty} \geqslant 1$, а значит $\|g\|_{L^1} \geqslant [2(M_N + \varepsilon)]^{-1}$, что доказывает (21).

Итак, мы имеем подпространство L в $L^2(0,1)$, $\dim L = \ell = [c_0 \ln N]$, для которого

1) если $g \in L$, то имеет место (21),

и

2) для каждого элемента ω 1 сети Ω на сфере $S_2^L = \{g \in L : \|g\|_{L^2} = 1\}$ найдутся функции $h_{j_1}, \dots, h_{j_s} \in L^\perp$ с $(h_{j_p}, h_{j_q}) = 0$ при $p \neq q$ и такие, что

$$\|\omega + h_{j_p}\|_{L^\infty} \leqslant M_N + \varepsilon, \qquad p = 1, \dots, s, \tag{22}$$

причем при $p = 1, \dots, s$

$$\|h_{j_p}\|_{L^2}^2 = \|\omega + h_{j_p}\|_{L^2}^2 - \|\omega\|_{L^2}^2 \leqslant (M_N + \varepsilon)^2 - 1 \leqslant (M_N + \varepsilon)^2 \tag{23}$$

(в качестве Ω следует взять множество $\varphi(\mathcal{V})$). Из (22) вытекает, что

$$\left\| \omega + \frac{1}{s}\left(h_{j_1} + \dots + h_{j_s}\right) \right\|_{L^\infty} \leqslant M_N + \varepsilon, \tag{24}$$

а попарная ортогональность функций h_j и оценка (23) влекут:

$$\left\| \frac{1}{s}\left(h_{j_1} + \dots + h_{j_s}\right) \right\|_{L^2} \leqslant \frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}}. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что для каждого элемента $\omega \in \Omega$ справедливо включение

$$\omega \in (M_N + \varepsilon) B_\infty + \frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}} B_2. \tag{26}$$

Включение (26) переносится и на выпуклую оболочку сети Ω и в итоге мы имеем (см. также (21)):

$$g \in L, \quad \|g\|_{L^2} \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \|g\|_{L^1} \geqslant [2(M_N + \varepsilon)]^{-1} \|g\|_{L^2}, \\ g \in 2(M_N + \varepsilon) B_\infty + 2\,\frac{M_N + \varepsilon}{\sqrt{s}} B_2. \end{cases} \tag{*}$$

Выведем из соотношения (*) оценку снизу для M_N. Нам потребуется следующая элементарная и непосредственно проверяемая

Лемма. *Пусть* $g \in L^2(0,1)$, $f \in L^\infty(0,1)$ *и* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *такие, что*

$$\alpha \leqslant \|g\|_{L^1} \leqslant \|g\|_{L^2} \leqslant 1, \qquad \beta \leqslant \|f\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \leqslant 1.$$

Положим

$$A = A(g,\alpha) = \left\{ t : \frac{\alpha}{3} \leqslant |g(t)| \leqslant \frac{3}{\alpha} \right\},$$
$$B = B(f,\beta) = \left\{ t : |f(t)| \geqslant \frac{\beta}{2} \right\}.$$

Тогда

$$\int_A |g|\, d\mu \geqslant \frac{\alpha}{3}, \qquad \mu(A) \equiv \operatorname{meas} A \geqslant \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2, \tag{27}$$
$$\int_B |f|\, d\mu \geqslant \frac{\beta}{2}, \qquad \operatorname{meas} B \geqslant \frac{\beta}{2}.$$

Пусть $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ – произвольный ортонормированный базис в L. Применяя только что сформулированную лемму к функциям из пространства $L^2(0,1)$ ψ_r, $r = 1, \dots, \ell$, для $\alpha = [2(M_N + \varepsilon)]^{-1}$ находим соответствующие (см. (27)) множества A_r, $r = 1, 2, \dots, \ell$. Пусть

$$\Psi = \sum_{r=1}^{\ell} |\psi_r|\, \chi_{A_r},$$

где через χ_A мы обозначаем характеристическую функцию множества A. Тогда

$$\|\Psi\|_{L^\infty} \leqslant 6(M_N + \varepsilon) \cdot \ell,$$
$$\int_0^1 \Psi\, d\mu \geqslant \frac{\ell}{6(M_N + \varepsilon)}\,.$$

Применяя теперь вторую часть леммы для функции $f = \Psi[6(M_N + \varepsilon)\ell]^{-1}$ и $\beta = [36(M_N+\varepsilon)^2]^{-1}$, мы находим такое множество $B \subset (0,1)$ с $\operatorname{meas} B \geqslant [72(M_N + \varepsilon)^2]^{-1}$, что при $t \in B$

$$\sum_{r=1}^{\ell} |\psi_r(t)| \geqslant \frac{\ell}{12(M_N + \varepsilon)} \tag{28}$$

и, кроме того,

$$\int_B \sum_{r=1}^{\ell} |\psi_j(t)|\, d\mu \geqslant \frac{\ell}{12(M_N+\varepsilon)}\,.$$

Из (28) вытекает существование таких подмножества $B_0 \subset B$ с мерой $\operatorname{meas} B_0 \geqslant 2^{-\ell+1} \operatorname{meas} B \geqslant 2^{-\ell}\frac{1}{[6(M_N+\varepsilon)]^2}$ и набора знаков $\varepsilon_r = \pm 1$, $r = 1, \dots, \ell$, что

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{r=1}^{\ell} \varepsilon_r \psi_r(t)\right| \geqslant \frac{\sqrt{\ell}}{12(M_N+\varepsilon)}\,; \qquad t \in B_0. \tag{29}$$

Пусть

$$B_2^L \ni g(t) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{r=1}^{\ell} \varepsilon_r \psi_r(t).$$

Заметим, что в силу (29) для любой функции $f \in 2(M_N+\varepsilon)B_\infty$

$$|g(t)-f(t)| \geqslant \frac{\sqrt{\ell}}{12(M_N+\varepsilon)} - 2(M_N+\varepsilon) \equiv \gamma, \qquad \text{если} \quad t \in B_0. \tag{30}$$

Проверим теперь, используя (30), что неравенство

$$(M_N+\varepsilon) \leqslant \frac{1}{10}\,[c_0 \ln N]^{1/4} = \frac{1}{10}\,\ell^{1/4} \tag{31}$$

противоречит (*) и, тем самым, завершим доказательство оценки (11)

$$M_N \geqslant \frac{1}{10}\,[c_0 \ln N]^{1/4}, \qquad N \geqslant N_0$$

Действительно, неравенство (31) влечет оценку: $\gamma \geqslant \frac{1}{2}\,[c_0 \ln N]^{1/4}$, а значит для любой $f \in 2(M_N+\varepsilon)B_\infty$

$$\|g-f\|_{L^2} \geqslant \gamma\,(\operatorname{meas} B_0)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}\,2^{-\ell/2} > \frac{2(M_N+\varepsilon)}{\sqrt{s}}\,, \tag{32}$$

что противоречит второму из соотношений (*). При проверке последнего из неравенств (32) мы учли, что (см. (17)) $s = [N^{3/4}]$, $2^\ell < 3^\ell \leqslant N^{1/4}$, а значит (см. также (5))

$$s > 20(C \ln^{1/2} N)^2 2^\ell \geqslant [4(M_N+\varepsilon)]^2 2^\ell,$$

если число N достаточно велико.

Теорема доказана.

В заключение нам приятно отметить, что результаты этой работы были получены во время визита первого автора в университет Париж-6, организованного при поддержке Национального центра научных исследований (Франция). Кроме того, Б. С. Кашин был поддержан грантом РФФИ НШ-1549.2003.1, С. Й. Шарек – грантом Национального научного фонда (США).

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН (Б. С. Кашин)

Université Paris VI,
Case Western Reserve University (S. J. Szarek)

Список литературы

[1] *Kashin B. S., Szarek S. J.* The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes// C. R. Acad. Sci. Paris, 2003, t. 336, Serie 1, P. 931–936.

[2] *Menshoff D.* Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble// Матем. сб., 1938, т. 3, с. 103–120.

[3] *Olevskii A. M.* Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems. Springer Verlag, Berlin, 1975.

[4] *Pisier G.* Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces// CBMS Regional Conference. Series in Mathematics, 60. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986.

[5] *Megretski A.* Relaxation of quadratic programs in operator theory and system analysis// Systems, approximation, singular integral operators, and related topics (Bordeaux, 2000). P. 365–392. Oper. Theory Adv. Appl., 129. Birkhäuser, Basel, 2001.